Berlin 19

EIN ENTSCHEIDUNGSVERFAHREN FÜR DEN LEWISSCHEN MODALKALKÜL S4

R. Kraus-kopf

EIN ENTSCHEIDUNGSVERFAHREN FÜR DEN LEWISSCHEN MODALKALKÜL S4

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Rainer Krauskopf

aus Wetzlar

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Gutachter: Professor Dr. K. Schröter

1. Referent: Professor Dr. H. Pachale
2. Referent: Professor Dr. K. P. Grotemeyer

Tag der mündlichen Prüfung: 15. 2. 1968
Tag der Promotion

- D 188 -

12. JAN. 1970

Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd. 15, S. 193—210 (1969)

EIN ENTSCHEIDUNGSVERFAHREN FÜR DEN LEWISSCHEN MODALKALKÜL S 4

von RAINER KRAUSKOPF in Gießen

Einleitung

In [8] gibt VON WRIGHT für einige der von ihm aufgestellten Modalkalküle Entscheidungsverfahren an. Der Grundgedanke dieser Verfahren ist, durch geeignete Modifizierung der im zweiwertigen Aussagenkalkül üblichen Wahrheitswertbelegungsmethode zu einem Entscheidungsverfahren für den betreffenden Kalkül zu kommen. Zwei weitere derartige Verfahren hat ANDERSON in [1] veröffentlicht. Der dort skizzierte Beweis für das Entscheidungsverfahren für S 4 ist allerdings nicht korrekt, und von dem von ANDERSON [2] — auf Grund eines Korrekturvorschlages von RUBIN — veröffentlichten abgeänderten Entscheidungsverfahren für S 4 läßt sich zeigen, daß es dem Kalkül S 4 nicht adäquat ist.

Aufgabe der vorliegenden Arbeit war es, für die Menge der in dem System $\mathfrak{S}$ von GÖDEL [4] ableitbaren Ausdrücke eine semantische Charakterisierung zu finden, die im Einklang steht mit der intendierten Interpretation von *BH* als „die Wahrheit von *H* ist mit irgendwelchen korrekten Mitteln beweisbar", und ein Entscheidungsverfahren zu entwickeln. Für den mit $\mathfrak{S}$ und S 4 deduktiv äquivalenten Kalkül $\varkappa$ wird nach Einführung einer Wahrheitswertung der Begriff „Quasiwahrform" definiert, die semantische Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit gezeigt und ein Entscheidungsverfahren angegeben.

Eine Belegung einer Formel Γ von $\varkappa$ ordnet jeder Aussagenvariablen von Γ und jeder modalen Konstituenten von Γ, d. h. jedem Teilausdruck der Form *BH* von Γ, einen der beiden Wahrheitswerte *W* oder *F* zu. Der Belegungswert von Γ bei einer Belegung errechnet sich mit Hilfe der zwei- bzw. einstelligen Wahrheitsfunktionen *et*, *vel*, *seq* und *non*. Es läßt sich zeigen, daß es zu jeder Formel Γ eine Menge $Q(\Gamma)$ gibt, die Teilmenge der Menge aller Belegungen von Γ ist und deren Elemente genau dann Γ sämtlich den Belegungswert *W* zuerteilen, wenn Γ in $\varkappa$ ableitbar ist. Eine Formel Γ heißt *Quasiwahrform*, wenn sie bei allen Belegungen aus $Q(\Gamma)$ den Belegungswert *W* erhält. Die Menge $Q(\Gamma)$ einer Formel Γ wird durch die folgenden Aussagen näher charakterisiert:

α) Eine Belegung einer Formel Γ ist Element von $Q(\Gamma)$, wenn sie Γ den Belegungswert *W* zuerteilt.

β) Eine Belegung einer Formel Γ ist nicht Element von $Q(\Gamma)$, wenn sie Γ den Belegungswert *F* zuerteilt und es eine modale Konstituente *BH* von Γ gibt, die den Belegungswert *W* zugeordnet bekommt, während ihr „Kern" *H* den Belegungswert *F* erhält.

γ) Eine Belegung einer Formel Γ ist Element von $Q(\Gamma)$, wenn sie Γ den Belegungswert *F* zuerteilt und alle modalen Konstituenten *BH* von Γ und ebenso deren Kerne *H* den Belegungswert *W* erhalten.

Ist eine Formel Γ gegeben, so kann es sein, daß allein an Hand der Aussagen α), β) und γ) entschieden werden kann, ob Γ Quasiwahrform ist oder nicht. Trifft dieser Fall nicht auf Γ zu, so wird Γ ein System $\mathfrak{M}(\Gamma)$ von Formelnmengen zugeordnet, das genau dann, wenn Γ Quasiwahrform ist, in jeder seiner Formelnmengen eine Quasiwahrform als Element besitzt:

Sind $f_1, f_2, \ldots, f_p$ $(p \geqq 1)$ diejenigen Belegungen von Γ, die sich nicht an Hand von α), β), γ) als Element von $Q(\Gamma)$ oder der Komplementärmenge von $Q(\Gamma)$ klassifizieren lassen, dann wird jeder Belegung f_ν $(1 \leqq \nu \leqq p)$ eine Formelnmenge M_ν folgendermaßen zugeordnet: $BH_1^{(\nu)}, \ldots, BH_{r_\nu}^{(\nu)}$ $(r_\nu \geqq 1)$ sei die Gesamtheit derjenigen modalen Konstituenten von Γ, die bei der Belegung f_ν den Belegungswert F erhalten, $BH_1'^{(\nu)}, \ldots, BH_{l_\nu}'^{(\nu)}$ $(l_\nu \geqq 0)$ seien die übrigen modalen Konstituenten von Γ. M_ν ist die Menge der Formeln $BH_1'^{(\nu)}, \ldots, BH_{l_\nu}'^{(\nu)} \vdash H_\mu^{(\nu)}$ $(\mu = 1, \ldots, r_\nu)$ und $\mathfrak{M}(\Gamma)$ das System der Formelnmengen M_ν.

Läßt sich durch Überprüfung der Formeln des Systems $\mathfrak{M}(\Gamma)$ an Hand von α), β), γ) die Frage, ob Γ Quasiwahrform ist oder nicht, nicht beantworten, so gibt es in jeder Formelnmenge M_ν des Systems $\mathfrak{M}(\Gamma)$ Formeln, über deren Quasiwahrformeigenschaft nicht an Hand von α), β), γ) entschieden werden kann. Die Untersuchung dieser Formeln führt in entsprechender Weise auf weitere Mengensysteme der oben angegebenen Art, usw. Wenn nach endlich vielen, $n(\Gamma)$ derartigen Schritten nicht durch Überprüfung der Formeln der so konstruierten Mengensysteme an Hand von α), β), γ) entschieden werden kann, ob Γ Quasiwahrform ist oder nicht, so ist Γ keine Quasiwahrform. Eine von der Anzahl der modalen Konstituenten von Γ abhängige obere Schranke für $n(\Gamma)$ gewährleistet, daß das Verfahren in jedem Falle nach endlich vielen Schritten abbricht.

Das Thema der vorliegenden Arbeit wurde mir von Herrn Prof. Dr. K. Schröter gestellt. Für die aufmerksame Betreuung und für viele Diskussionen bei der Ausführung der Arbeit bin ich ihm und Herrn Prof. Dr. H. Pachale zu Dank verpflichtet.

§ 1. Die Ausdrucksmittel

Grundzeichen des von uns betrachteten Kalküls sind:

a) die Aussagenvariablen $p_0, p_1, p_2, \ldots$, unbestimmt angedeutet durch v, nach Bedarf mit Unterscheidungszeichen;
b) die aussagenlogischen Funktoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \sim$;
c) der Funktor B;
d) die technischen Zeichen (,), , (Komma);
e) das Zeichen $\vdash$.

Die *Ausdrücke* werden wie üblich induktiv definiert:

(1) Die Aussagenvariablen sind Ausdrücke;

(2) a) Mit Z_1 und Z_2 sind auch $(Z_1 \wedge Z_2)$, $(Z_1 \vee Z_2)$, $(Z_1 \rightarrow Z_2)$ Ausdrücke;

b) Mit Z sind auch $\sim Z$, BZ Ausdrücke;

(3) Eine Zeichenreihe Z ist nur dann ein Ausdruck, wenn dies auf Grund von (1) und/oder (2) der Fall ist.

Ausdrücke werden im folgenden unbestimmt angedeutet durch H, nach Bedarf mit Unterscheidungszeichen.

Unter einer *Formel* verstehen wir eine Zeichenreihe der Form

$$H_1, H_2, \ldots, H_k \vdash H'_1, H'_2, \ldots, H'_l \quad (k, l \geqq 0),$$

wobei $H_1, H_2, \ldots, H_k$ und $H'_1, H'_2, \ldots, H'_l$ endliche Folgen von Ausdrücken sind. Die leere Folge ist jeweils zugelassen und wird durch eine Leerstelle an der betreffenden Stelle angezeigt. Die Zeichenreihe $H_1, H_2, \ldots, H_k$ heiße die *vordere Folge* oder das *Antecedens* und die Zeichenreihe $H'_1, H'_2, \ldots, H'_l$ die *hintere Folge* oder das *Succedens* von

$$H_1, H_2, \ldots, H_k \vdash H'_1, H'_2, \ldots, H'_l.$$

Teilfolgen eines Antecedens werden unbestimmt angedeutet durch $\mathfrak{X}$, Teilfolgen eines Succedens durch $\mathfrak{Y}$ und Formeln durch Γ, nach Bedarf jeweils mit Unterscheidungszeichen.

§ 2. Aussagenlogische Wahrform. Quasiwahrform

Definition 1 (Konstituenten eines Ausdrucks). Gegeben sei ein Ausdruck H. Es sei $H' \in \mathfrak{K}(H)$ genau dann, wenn H' eine Aussagenvariable ist, die in H auftritt, oder ein Teilausdruck von H von der Form BH''. $\mathfrak{K}(H)$ heiße die *Konstituentenmenge von* H.

Definition 2 (Modale Konstituenten eines Ausdrucks). Gegeben sei ein Ausdruck H. Es sei $H' \in \mathfrak{K}_m(H)$ genau dann, wenn H' ein Teilausdruck von H von der Form BH'' ist. $\mathfrak{K}_m(H)$ heiße die *modale Konstituentenmenge von* H.

Definition 3 (Konstituenten einer Formel). Gegeben sei eine Formel $\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}$. Es sei $H' \in \mathfrak{K}(\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y})$ genau dann, wenn H' Konstituente eines in $\mathfrak{X}$ oder in $\mathfrak{Y}$ als Folgenglied auftretenden Ausdrucks ist. $\mathfrak{K}(\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y})$ heiße die *Konstituentenmenge von* $\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}$.

Definition 4 (Modale Konstituenten einer Formel). Gegeben sei eine Formel $\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}$. Es sei $H' \in \mathfrak{K}_m(\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y})$ genau dann, wenn H' modale Konstituente eines in $\mathfrak{X}$ oder in $\mathfrak{Y}$ als Folgenglied auftretenden Ausdrucks ist. $\mathfrak{K}_m(\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y})$ heiße die *modale Konstituentenmenge von* $\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}$.

Definition 5 (Wahrheitswertbestimmende Konstituenten eines Ausdrucks). Gegeben sei ein Ausdruck H. Es sei $H' \in \mathfrak{K}^W(H)$ genau dann, wenn H' eine Konstituente von H ist, und es in der Aufschichtungsfigur[1]) von H eine Plazierung von H' derart gibt, daß es keinen durch diese H'-Plazierung hindurchführenden Aufschichtungsfaden[1]) von H gibt, der Plazierungen modaler Konstituenten unterhalb von dieser H'-Plazierung aufweist.

[1]) Vgl. [5].

Definition 6 (Wahrheitswertbestimmende Konstituenten einer Formel). Gegeben sei eine Formel $\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}$. Es sei $H' \in \mathfrak{K}^W(\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y})$ genau dann, wenn H' wahrheitswertbestimmende Konstituente eines in $\mathfrak{X}$ oder $\mathfrak{Y}$ als Folgenglied auftretenden Ausdrucks ist.

Definition 7 (Belegung eines Ausdrucks). Gegeben sei ein Ausdruck H. f ist eine *Belegung von* H genau dann, wenn f eine Abbildung von $\mathfrak{K}(H)$ in die Menge $\{W, F\}$ ist.

Definition 8 (Belegung einer Formel). Gegeben sei eine Formel Γ. f ist eine *Belegung von* Γ genau dann, wenn f eine Abbildung von $\mathfrak{K}(\Gamma)$ in die Menge $\{W, F\}$ ist.

Definition 9 (Belegungswert eines Ausdrucks). Der einer Konstituenten bei einer Belegung zugeordnete Wahrheitswert heiße ihr *Belegungswert*. Der *Belegungswert* $Wert(H, f)$ eines Ausdrucks H bei einer Belegung f von H errechnet sich von den Belegungswerten der wahrheitswertbestimmenden Konstituenten von H ausgehend in der üblichen Weise mit Hilfe der zwei- bzw. einstelligen Wahrheitsfunktionen *et*, *vel*, *seq*, *non*.

Definition 10 (Belegungswert einer Formel). Gegeben seien eine Formel $\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}$ und eine Belegung f dieser Formel. Wir setzen:

$$Wert(\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}, f) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} F, \text{ wenn für alle Glieder } H \text{ des Antecedens } \mathfrak{X} \text{ gilt:} \\ \qquad Wert(H, f) = W \\ \quad \text{und für alle Glieder } H' \text{ des Succedens } \mathfrak{Y} \text{ gilt:} \\ \qquad Wert(H', f) = F. \\ W \text{ sonst.} \end{cases}$$

Definition 11. Gegeben seien eine Formel Γ und eine Belegung f dieser Formel. Dann sei $H \in \mathfrak{K}_m^{(f)W}(\Gamma)$ genau dann, wenn $H \in \mathfrak{K}_m(\Gamma)$ und $Wert(H, f) = W$.

Definition 12 (Aussagenlogische Wahrform). Gegeben sei eine Formel Γ. Γ ist *aussagenlogische Wahrform* genau dann, wenn für alle Belegungen f von Γ gilt: $Wert(\Gamma, f) = W$.

Definition 13 (Modaler Grad einer Formel). Gegeben sei eine Formel Γ. Wir setzen: $grad(\Gamma) =_{\mathrm{Df}}$ Anzahl der in Γ auftretenden B-Zeichen.

Definition 14 (n-stufige Quasiwahrform). Γ ist *n-stufige Quasiwahrform* genau dann, wenn die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind:

(1) $grad(\Gamma) \leqq n$.

(2) Alle Belegungen f von Γ mit $Wert(\Gamma, f) = F$ erfüllen mindestens eine der folgenden drei Bedingungen:

I. Es gibt ein $BH \in \mathfrak{K}_m(\Gamma)$ mit $Wert(BH, f) = W$ und $Wert(H, f) = F$.

II. Es gibt ein $BH \in \mathfrak{K}_m(\Gamma)$ und ein m mit $0 \leqq m < n$, so daß $Wert(BH, f) = F$, $\mathfrak{K}_m^{(f)W}(\Gamma) = \emptyset$ und $\vdash H$ ist m-stufige Quasiwahrform.

III. Es gibt ein $BH \in \mathfrak{K}_m(\Gamma)$ und ein m mit $0 \leqq m < n$, so daß $Wert(BH, f) = F$, $\mathfrak{K}_m^{(f)W}(\Gamma) = \{BH_1, BH_2, \ldots, BH_k\}$ $(k \geqq 1)$ und $BH_1, BH_2, \ldots, BH_k \vdash H$ ist m-stufige Quasiwahrform.

Definition 15 (Quasiwahrform). Γ ist *Quasiwahrform* genau dann, wenn es ein $n \geqq 0$ gibt, so daß Γ n-stufige Quasiwahrform ist.

Interpretiert man „BH" als „H ist beweisbar", genauer als „die Wahrheit von H ist mit irgendwelchen korrekten Mitteln beweisbar", und „$\mathfrak{X} \vdash H$" wie üblich als „H ist aus $\mathfrak{X}$ ableitbar", so kann man

I′. $Wert(BH, f) = W \Rightarrow Wert(H, f) = W$;

II′. $\vdash H$ ist Quasiwahrform $\Rightarrow Wert(BH, f) = W$;

III′. $\left.\begin{array}{l} BH_1, \ldots, BH_k \vdash H \text{ ist Quasiwahrform und} \\ Wert(BH_1, f) = \cdots = Wert(BH_k, f) = W \end{array}\right\} \Rightarrow Wert(BH, f) = W$

deuten als

α) Beweisbares ist wahr.

β) Ableitbares ist beweisbar.

γ) Aus Beweisbarem Ableitbares ist beweisbar.

Von einem „vernünftigen" Beweisbarkeits- und von einem „vernünftigen" Ableitbarkeitsbegriff wird man erwarten dürfen, daß die Forderungen α), β) und γ) erfüllt werden. Die Definition 14 mit ihren Bedingungen I., II. und III. besagt nun im wesentlichen, daß zur Bestimmung der Quasiwahrformeigenschaft einer Formel nur diejenigen Belegungen betrachtet zu werden brauchen, die nicht gegen eine der drei Forderungen I′., II′. und III′. verstoßen. Die gegebene Definition der Quasiwahrform steht somit im Einklang mit den angedeuteten inhaltlichen Vorstellungen.

§ 3. Der Kalkül $\varkappa$

Die Definition der Ableitbarkeit einer Formel erfolgt wie üblich induktiv:

(1) Axiomenschema. $v \vdash v$.

(2) Schlußregeln.

a) Strukturregeln:

Umstellungsregeln:

$$Uv\,\frac{\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}' \vdash \mathfrak{Y}}, \qquad Uh\,\frac{\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}'},$$

wobei $\mathfrak{X}'$ eine Permutation von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}'$ eine Permutation von $\mathfrak{Y}$ ist.

Verdünnungsregeln:

$$Vv\,\frac{\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, H \vdash \mathfrak{Y}}, \qquad Vh\,\frac{\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \vdash H, \mathfrak{Y}}.$$

Kürzungsregel:

$$K_B v\,\frac{\mathfrak{X}, BH, BH \vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, BH \vdash \mathfrak{Y}}.$$

b) Verknüpfungsregeln:

$$\wedge v\,\frac{\mathfrak{X}, H_1, H_2 \vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, H_1 \wedge H_2 \vdash \mathfrak{Y}}, \qquad \wedge h\,\frac{\mathfrak{X} \vdash H_1, \mathfrak{Y} \quad \mathfrak{X} \vdash H_2, \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \vdash H_1 \wedge H_2, \mathfrak{Y}};$$

$$\vee v\,\frac{\mathfrak{X}, H_1 \vdash \mathfrak{Y} \quad \mathfrak{X}, H_2 \vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, H_1 \vee H_2 \vdash \mathfrak{Y}}, \qquad \vee h\,\frac{\mathfrak{X} \vdash H_1, H_2, \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \vdash H_1 \vee H_2, \mathfrak{Y}};$$

$$\rightarrow v\,\frac{\mathfrak{X} \vdash H_1, \mathfrak{Y} \quad \mathfrak{X}, H_2 \vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, H_1 \rightarrow H_2 \vdash \mathfrak{Y}}, \qquad \rightarrow h\,\frac{\mathfrak{X}, H_1 \vdash H_2, \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \vdash H_1 \rightarrow H_2, \mathfrak{Y}};$$

$$\sim v\,\frac{\mathfrak{X} \vdash H, \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, \sim H \vdash \mathfrak{Y}}, \qquad \sim h\,\frac{\mathfrak{X}, H \vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X} \vdash \sim H, \mathfrak{Y}};$$

$$Bv\,\frac{\mathfrak{X}, H \vdash \mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}, BH \vdash \mathfrak{Y}}, \qquad Bh\,\frac{\mathfrak{X}_B \vdash H}{\mathfrak{X}_B \vdash BH},$$

wobei das Antecedens $\mathfrak{X}_B$ entweder leer oder eine Folge von der Form BH_1, $BH_2, \ldots, BH_k$ $(k \geqq 1)$ ist.

(3) Eine Formel ist nur dann ableitbar, wenn dies auf Grund von (1) und/oder (2) der Fall ist.

Die Ableitbarkeit einer Formel Γ wird durch „Γ *ableitbar*" ausgedrückt.

Definition 16 (Rang eines Ableitungsfadens). Gegeben sei ein Ableitungsfaden[1]) $\mathfrak{F}$ einer Ableitungsfigur[1]) $\mathfrak{A}$. Wir setzen: $rang(\mathfrak{F}) =_{\mathrm{Df}}$ Anzahl der in $\mathfrak{F}$ vorkommenden nichtstrukturellen Schlüsse (d. h. der in $\mathfrak{F}$ vorkommenden Schlüsse gemäß (2) b)).

Definition 17 (Rang einer Ableitungsfigur). Gegeben sei eine Ableitungsfigur[1]) $\mathfrak{A}$. Es sei $r \in \mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ genau dann, wenn es einen Ableitungsfaden[1]) $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{A}$ mit $r = rang(\mathfrak{F})$ gibt. Wir setzen: $rang(\mathfrak{A}) =_{\mathrm{Df}} \max(\mathfrak{R}(\mathfrak{A}))$.

Definition 18 (r-stufig ableitbar). Gegeben sei eine Formel Γ.

Γ ist r-stufig ableitbar genau dann, wenn es eine Ableitungsfigur[1]) $\mathfrak{A}$ mit Γ als Endformel[1]) und $rang(\mathfrak{A}) = r$ gibt.

Definition 19.

$\mathfrak{X} \underset{r}{\vdash} \mathfrak{Y}$ genau dann, wenn $\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}$ ist r-stufig ableitbar;

$\mathfrak{X} \underset{\leqq r}{\vdash} \mathfrak{Y}$ genau dann, wenn es ein p mit $0 \leqq p \leqq r$ und $\mathfrak{X} \underset{p}{\vdash} \mathfrak{Y}$ gibt.

Definition 20.

$\mathfrak{X}, \boldsymbol{H} \vdash \mathfrak{Y}$ *ableitbar* genau dann, wenn es eine Ableitungsfigur $\mathfrak{A}$ mit den folgenden Eigenschaften a), b) und c) gibt:

a) $\mathfrak{X}, H \vdash \mathfrak{Y}$ ist Endformel von $\mathfrak{A}$;

[1]) Vgl. [5].

b) Die Endformel $\mathfrak{X}, H \vdash \mathfrak{Y}$ tritt in $\mathfrak{A}$ als Unterformel eines Schlusses R gemäß einer Verknüpfungsregel (2) b) auf;

c) Das in der Endformel $\mathfrak{X}, H \vdash \mathfrak{Y}$ mitgeteilte H ist Hauptfolgenglied in der Unterformel des Schlusses R. „$\mathfrak{X} \vdash \boldsymbol{H}, \mathfrak{Y}$ *ableitbar*" wird analog definiert.

§ 4. Semantische Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit von $\varkappa$

Die im folgenden nicht ausgeführten Beweise der Sätze 1 bis 6 erfolgen mit Hilfe bekannter syntaktischer Begriffsbildungen für GENTZENsche Kalküle, insbesondere dem des „Bundes"[1]). In der Formulierung der Sätze 4 und 5 wird das Zeichen „$\forall$" als Kürzel für „Für alle" verwendet.

Satz 1. *Für jeden Ausdruck H gilt: $H \vdash H$ ableitbar.*

Satz 2. *Für beliebige Folgen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ und beliebige Ausdrücke H, H_1, H_2 gilt:*

$$\wedge v^* \quad \mathfrak{X}, H_1 \wedge H_2 \underset{n}{\vdash} \mathfrak{Y} \Rightarrow \mathfrak{X}, H_1, H_2 \underset{\leqq n}{\vdash} \mathfrak{Y};$$

$$\wedge h^* \quad \mathfrak{X} \underset{n}{\vdash} H_1 \wedge H_2, \mathfrak{Y} \Rightarrow \mathfrak{X} \underset{\leqq n}{\vdash} H_1, \mathfrak{Y} \text{ und } \mathfrak{X} \underset{\leqq n}{\vdash} H_2, \mathfrak{Y};$$

$$\vee v^* \quad \mathfrak{X}, H_1 \vee H_2 \underset{n}{\vdash} \mathfrak{Y} \Rightarrow \mathfrak{X}, H_1 \underset{\leqq n}{\vdash} \mathfrak{Y} \text{ und } \mathfrak{X}, H_2 \underset{\leqq n}{\vdash} \mathfrak{Y};$$

$$\vee h^* \quad \mathfrak{X} \underset{n}{\vdash} H_1 \vee H_2, \mathfrak{Y} \Rightarrow \mathfrak{X} \underset{\leqq n}{\vdash} H_1, H_2, \mathfrak{Y};$$

$$\rightarrow v^* \quad \mathfrak{X}, H_1 \rightarrow H_2 \underset{n}{\vdash} \mathfrak{Y} \Rightarrow \mathfrak{X} \underset{\leqq n}{\vdash} H_1, \mathfrak{Y} \text{ und } \mathfrak{X}, H_2 \underset{\leqq n}{\vdash} \mathfrak{Y};$$

$$\rightarrow h^* \quad \mathfrak{X} \underset{n}{\vdash} H_1 \rightarrow H_2, \mathfrak{Y} \Rightarrow \mathfrak{X}, H_1 \underset{\leqq n}{\vdash} H_2, \mathfrak{Y};$$

$$\sim v^* \quad \mathfrak{X}, \sim H \underset{n}{\vdash} \mathfrak{Y} \Rightarrow \mathfrak{X} \underset{\leqq n}{\vdash} H, \mathfrak{Y};$$

$$\sim h^* \quad \mathfrak{X} \underset{n}{\vdash} \sim H, \mathfrak{Y} \Rightarrow \mathfrak{X}, H \underset{\leqq n}{\vdash} \mathfrak{Y};$$

$$\sim Bh^* \quad \mathfrak{X} \underset{n}{\vdash} BH, \mathfrak{Y} \Rightarrow \mathfrak{X} \underset{\leqq n}{\vdash} H, \mathfrak{Y}.$$

Satz 3. *Für beliebige Folgen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ und beliebige Ausdrücke H gilt:*

$$Kv \quad \mathfrak{X}, H, H \underset{n}{\vdash} \mathfrak{Y} \Rightarrow \mathfrak{X}, H \underset{\leqq n}{\vdash} \mathfrak{Y};$$

$$Kh \quad \mathfrak{X} \underset{n}{\vdash} H, H, \mathfrak{Y} \Rightarrow \mathfrak{X} \underset{\leqq n}{\vdash} H, \mathfrak{Y}.$$

Satz 4. *Für beliebige Folgen $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1$ und beliebige Ausdrücke H gilt:*

$$\forall \tilde{\mathfrak{X}}_2, \tilde{\mathfrak{Y}}_2 \; (\mathfrak{X}_1, H \vdash \mathfrak{Y}_1 \text{ ableitbar und } \tilde{\mathfrak{X}}_2 \vdash \boldsymbol{H}, \tilde{\mathfrak{Y}}_2 \text{ ableitbar}$$
$$\Rightarrow \mathfrak{X}_1, \tilde{\mathfrak{X}}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \tilde{\mathfrak{Y}}_2 \text{ ableitbar}) .\Rightarrow.$$
$$\forall \mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2 \; (\mathfrak{X}_1, H \vdash \mathfrak{Y}_1 \text{ ableitbar und } \mathfrak{X}_2 \vdash H, \mathfrak{Y}_2 \text{ ableitbar}$$
$$\Rightarrow \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2 \text{ ableitbar}).$$

[1]) Vgl. [5], „Formelbund".

Satz 5. *Für beliebige Folgen* $\widetilde{\mathfrak{X}}_2$, $\widetilde{\mathfrak{Y}}_2$ *und beliebige Ausdrücke* H *gilt:*

$$\forall \widetilde{\mathfrak{X}}_1, \widetilde{\mathfrak{Y}}_1\ (\widetilde{\mathfrak{X}}_1, \boldsymbol{H} \vdash \widetilde{\mathfrak{Y}}_1 \text{ ableitbar und } \widetilde{\mathfrak{X}}_2 \vdash \boldsymbol{H}, \widetilde{\mathfrak{Y}}_2 \text{ ableitbar} \Rightarrow \widetilde{\mathfrak{X}}_1, \widetilde{\mathfrak{X}}_2 \vdash \widetilde{\mathfrak{Y}}_1, \widetilde{\mathfrak{Y}}_2 \text{ ableitbar}) .\Rightarrow.$$

$$\forall \mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1\ (\mathfrak{X}_1, H \vdash \mathfrak{Y}_1 \text{ ableitbar und } \widetilde{\mathfrak{X}}_2 \vdash \boldsymbol{H}, \widetilde{\mathfrak{Y}}_2 \text{ ableitbar} \Rightarrow \mathfrak{X}_1, \widetilde{\mathfrak{X}}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \widetilde{\mathfrak{Y}}_2 \text{ ableitbar}).$$

Satz 6 (Schnittelimination). *Für beliebige Folgen* $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$ *und beliebige Ausdrücke* H *gilt:*

$$\mathfrak{X}_1, H \vdash \mathfrak{Y}_1 \text{ ableitbar und } \mathfrak{X}_2 \vdash H, \mathfrak{Y}_2 \text{ ableitbar} \Rightarrow \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2 \text{ ableitbar}.$$

Satz 7.

a) Γ *ist* n*-stufige Quasiwahrform und* $n \leqq m \Rightarrow \Gamma$ *ist* m*-stufige Quasiwahrform*;
b) Γ *ist* 0*-stufige Quasiwahrform* $\Rightarrow \Gamma$ *ist aussagenlogische Wahrform*;
c) Γ *ist aussagenlogische Wahrform und* $n = grad(\Gamma) \Rightarrow \Gamma$ *ist* n*-stufige Quasiwahrform.*

Satz 8. $\mathfrak{X}_1 \vdash \mathfrak{Y}_1$ *ist Quasiwahrform* $\Rightarrow \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ *ist Quasiwahrform.*

Beweis. Nach Definition 15 genügt es zu zeigen, daß für alle $n \geqq 0$ gilt:

$\mathfrak{X}_1 \vdash \mathfrak{Y}_1$ ist n-stufige Quasiwahrform $\Rightarrow \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ ist Quasiwahrform.

Der Beweis hierfür erfolgt durch vollständige Induktion nach n:

I. $n = 0$: Mit $\mathfrak{X}_1 \vdash \mathfrak{Y}_1$ gemäß Satz 7b) ist auch $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ aussagenlogische Wahrform (Definitionen 10 und 12) und damit Quasiwahrform (Satz 7c), Def. 15).

II. $n > 0$: Gegeben sei eine Formel $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ mit: $\mathfrak{X}_1 \vdash \mathfrak{Y}_1$ ist n-stufige Quasiwahrform.

1. Fall: $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ ist aussagenlogische Wahrform. Dann ist $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ Quasiwahrform (Satz 7c), Def. 15).

2. Fall: $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ ist keine aussagenlogische Wahrform. $f_1, f_2, \ldots, f_p$ $(p \geqq 1)$ sei die Gesamtheit derjenigen Belegungen von $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$, die $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ den Belegungswert F zuerteilen. Zu jeder derartigen Belegung f_ν $(1 \leqq \nu \leqq p)$ bestimmen wir auf folgende Weise eine ganze Zahl $r_\nu \geqq 0$: Aus $Wert(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, f_\nu) = F$ folgt $Wert(\mathfrak{X}_1 \vdash \mathfrak{Y}_1, f_\nu) = F$ (Definition 10). Da $\mathfrak{X}_1 \vdash \mathfrak{Y}_1$ eine n-stufige Quasiwahrform ist, erfüllt f_ν gemäß Definition 14 mindestens eine der folgenden drei Bedingungen:

I. Es gibt ein $BH \in \mathfrak{R}_m(\mathfrak{X}_1 \vdash \mathfrak{Y}_1)$ mit

$$Wert(BH, f_\nu) = W \quad \text{und} \quad Wert(H, f_\nu) = F.$$

II. Es gibt ein $BH \in \mathfrak{R}_m(\mathfrak{X}_1 \vdash \mathfrak{Y}_1)$ und ein m mit $0 \leqq m < n$, so daß $Wert(BH, f_\nu) = F$, $\mathfrak{R}_m^{(f_\nu)W}(\mathfrak{X}_1 \vdash \mathfrak{Y}_1) = \emptyset$ und $\vdash H$ ist m-stufige Quasiwahrform.

III. Es gibt ein $BH \in \mathfrak{R}_m(\mathfrak{X}_1 \vdash \mathfrak{Y}_1)$ und ein m mit $0 \leqq m < n$, so daß $Wert(BH, f_\nu) = F$, $\mathfrak{R}_m^{(f_\nu)W}(\mathfrak{X}_1 \vdash \mathfrak{Y}_1) = \{BH_1, \ldots, BH_k\}$ $(k \geqq 1)$ und $BH_1, \ldots, BH_k \vdash H$ ist m-stufige Quasiwahrform.

Fall I: f_ν erfüllt Bedingung I. Dann setzen wir $r_\nu =_{\mathrm{Df}} grad(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2)$.

Fall II: f_ν erfüllt Bedingung II., f_ν erfüllt nicht Bedingung I. Dann gibt es einen Ausdruck BH mit den unter II. angegebenen Eigenschaften. $\mathfrak{X}_{f_\nu}$ sei die Folge der Elemente von $\bar{\mathfrak{R}}_m^{(f_\nu)W}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2)$. Dann ist $\mathfrak{X}_{f_\nu} \vdash H$ Quasiwahrform nach Induktionsvoraussetzung. Somit gibt es eine ganze Zahl $r_\nu \geqq 0$ mit: $\mathfrak{X}_{f_\nu} \vdash H$ ist r_ν-stufige Quasiwahrform (Def. 15).

Fall III: f_ν erfüllt Bedingung III., f_ν erfüllt nicht Bedingung I. Dann gibt es Ausdrücke BH und $BH_1, \ldots, BH_k$ mit den unter III. angegebenen Eigenschaften. $\mathfrak{X}_{f_\nu}$ sei die Folge der Elemente von $\bar{\mathfrak{R}}_m^{(f_\nu)W}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2) \setminus \bar{\mathfrak{R}}_m^{(f_\nu)W}(\mathfrak{X}_1 \vdash \mathfrak{Y}_1)$. Dann ist $\mathfrak{X}_{f_\nu}, BH_1, \ldots, BH_k \vdash H$ Quasiwahrform nach Induktionsvoraussetzung. Somit gibt es eine ganze Zahl $r_\nu \geqq 0$ mit: $\mathfrak{X}_{f_\nu}, BH_1, \ldots, BH_k \vdash H$ ist r_ν-stufige Quasiwahrform (Def. 15).

Definiert man nun:

$$q =_{\mathrm{Df}} \max\{grad(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2), r_1, \ldots, r_p\} + 1,$$

so ist leicht einzusehen, daß $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \vdash \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ q-stufige Quasiwahrform und mithin Quasiwahrform ist.

Satz 9 (Semantische Widerspruchsfreiheit).

Γ ableitbar (in $\varkappa$) $\Rightarrow$ Γ ist Quasiwahrform.

Beweis. Es genügt zu zeigen:

a) Jedes Axiom ist Quasiwahrform.

b) Die Quasiwahrformeigenschaft einer Formel bzw. zweier Formeln vererbt sich bei Anwendung jeder der Schlußregeln (2).

Zu a): Jedes Axiom Γ ist von der Form $v \vdash v$ und somit aussagenlogische Wahrform (Def. 12). Nach Satz 7c), Definition 15 ist Γ dann auch Quasiwahrform.

Zu b):

Fall Uv und Fall Uh: Definition 14.

Fall Vv und Fall Vh: Satz 8.

Fall $K_B v$: Definition 14.

Fall $\wedge v$, Fall $\vee h, \ldots,$ Fall $\sim v$, Fall $\sim h$: Die Beweise lassen sich jeweils analog zu dem mit „II. $n > 0$“ beginnenden Beweisteil des Beweises von Satz 8 führen. An allen den Stellen dieses Beweisteils, an welchen die Induktionsvoraussetzung Anwendung findet, kann jetzt Satz 8 als Beleg dienen. Da eine Belegung der Unterformel eines Schlusses (gemäß einer der Schlußregeln $\vee v$, $\wedge h, \ldots, \sim h$) mit der Unterformel nicht notwendig sämtlichen Oberformeln, sondern nur mindestens einer von ihnen den Belegungswert F zuerteilt, ist in den Fällen $\wedge h$, $\vee v$, $\rightarrow v$ jeweils eine Fallunterscheidung vorzunehmen.

Fall Bv: Gegeben sei eine Formel $\mathfrak{X}, BH \vdash \mathfrak{Y}$ mit: $\mathfrak{X}, H \vdash \mathfrak{Y}$ ist n-stufige Quasiwahrform.

1. Fall: $\mathfrak{X}$, $BH \nvdash \mathfrak{Y}$ ist aussagenlogische Wahrform. Dann ist $\mathfrak{X}$, $BH \nvdash \mathfrak{Y}$ Quasiwahrform (Satz 7c), Def. 15).

2. Fall: $\mathfrak{X}$, $BH \nvdash \mathfrak{Y}$ ist keine aussagenlogische Wahrform. $f_1, f_2, \ldots, f_p$ $(p \geqq 1)$ sei die Gesamtheit derjenigen Belegungen von $\mathfrak{X}$, $BH \nvdash \mathfrak{Y}$, die $\mathfrak{X}$, $BH \nvdash \mathfrak{Y}$ den Belegungswert F zuerteilen. Zu jeder derartigen Belegung f_ν $(1 \leqq \nu \leqq p)$ wird eine ganze Zahl $r_\nu \geqq 0$ folgendermaßen bestimmt:

Fall 2.1: $Wert(\mathfrak{X}, H \nvdash \mathfrak{Y}), f_\nu) = W$. Aus Fallannahme und $Wert(\mathfrak{X}, BH \nvdash \mathfrak{Y}), f_\nu) = F$ folgt mit Definition 10:

$$Wert(BH, f_\nu) = W \quad \text{und} \quad Wert(H, f_\nu) = F.$$

Es wird $r_\nu =_{\mathrm{Df}} grad(\mathfrak{X}, BH \nvdash \mathfrak{Y}))$ gesetzt.

Fall 2.2: $Wert(\mathfrak{X}, H \nvdash \mathfrak{Y}), f_\nu) = F$. Der nun folgende Beweisteil zum 2. Fall läßt sich analog zu dem Beweis für Fall $\wedge\nu$ ausführen.

Fall Bh: Gegeben sei eine Formel $\mathfrak{X}_B \nvdash BH$, in der das Antecedens $\mathfrak{X}_B$ entweder leer oder eine Folge von der Form $BH_1, BH_2, \ldots, BH_k$ $(k \geqq 1)$ ist, wobei gilt: $\mathfrak{X}_B \nvdash H$ ist n-stufige Quasiwahrform.

1. Fall: $\mathfrak{X}_B \nvdash BH$ ist aussagenlogische Wahrform. Dann ist $\mathfrak{X}_B \nvdash BH$ Quasiwahrform (Satz 7c), Definition 15).

2. Fall: $\mathfrak{X}_B \nvdash BH$ ist keine aussagenlogische Wahrform. $f_1, f_2, \ldots, f_p$ $(p \geqq 1)$ sei die Gesamtheit derjenigen Belegungen von $\mathfrak{X}_B \nvdash BH$, die $\mathfrak{X}_B \nvdash BH$ den Belegungswert F zuerteilen. Zu jeder derartigen Belegung f_ν $(1 \leqq \nu \leqq p)$ läßt sich eine ganze Zahl $r_\nu \geqq 0$ folgendermaßen auffinden: $\widetilde{\mathfrak{X}}_B \nvdash H$ sei diejenige Formel, die man aus der Formel $\mathfrak{X}_B \nvdash H$ durch Beseitigung etwaiger Vielfachheiten von Folgengliedern im Antecedens gemäß Schlußregel $K_B v$ erhält. $\widetilde{\mathfrak{X}}_B \nvdash H$ ist Quasiwahrform (Fall $K_B v$). Es sei $BH \in \mathfrak{R}_{f_\nu}$ genau dann, wenn $BH \in \mathfrak{R}_m^{(f_\nu)W}(\mathfrak{X}_B \nvdash BH)$ und BH nicht als Folgenglied in dem Antecedens $\widetilde{\mathfrak{X}}_B$ auftritt. $\mathfrak{X}_{f_\nu}$ sei die Folge der Elemente von $\mathfrak{R}_{f_\nu}$. Dann ist $\mathfrak{X}_{f_\nu}$, $\widetilde{\mathfrak{X}}_B \nvdash H$ Quasiwahrform nach Satz 8. Somit gibt es gemäß Definition 15 eine ganze Zahl $r_\nu \geqq 0$ mit: $\mathfrak{X}_{f_\nu}$, $\widetilde{\mathfrak{X}}_B \nvdash H$ ist r_ν-stufige Quasiwahrform. Definiert man nun:

$$q =_{\mathrm{Df}} \max\{grad(\mathfrak{X}_B \nvdash BH), r_1, \ldots, r_p\} + 1,$$

so ist leicht einzusehen, daß $\mathfrak{X}_B \nvdash BH$ q-stufige Quasiwahrform und somit Quasiwahrform ist.

Definition 21 (Modaler Grad eines Ausdrucks). Gegeben sei ein Ausdruck H. Wir setzen: $grad(H) =_{\mathrm{Df}}$ Anzahl der in H auftretenden B-Zeichen.

Definition 22. Gegeben sei eine Formel Γ. $BH_1, BH_2, \ldots, BH_l, v_1, v_2, \ldots, v_k$ sei die Folge der Elemente von $\mathfrak{R}^W(\Gamma)$ nach abnehmendem modalem Grad von links nach rechts geordnet $(l \geqq 0,\ k \geqq 0,\ l + k \geqq 1)$. $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_l$ sei eine Folge von Aussagenvariablen, deren Glieder paarweise voneinander verschieden sind und nicht in Γ vorkommen. Ferner sei

$$\tilde{\Gamma} =_{\mathrm{Df}} \Big(\ldots \Big(\Big(\Gamma^{BH_1}/_{\bar{v}_1} \Big) BH_2{}'_{\bar{v}_2} \Big) \ldots \Big) BH_l{}_{\bar{v}_l}$$

$g(\Gamma) =_{\mathrm{Df}}$ Anzahl der in Γ auftretenden aussagenlogischen Funktoren $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$.
Wir setzen:

$$
Red(\Gamma) =_{\mathrm{Df}} \begin{cases}
\{\mathfrak{X}', H_1, H_2, \mathfrak{X}'' \vdash \mathfrak{Y}\}, \\
\quad \text{falls zutrifft: a) } \Gamma \text{ ist von der Form } \mathfrak{X}', H_1 \wedge H_2, \mathfrak{X}'' \vdash \mathfrak{Y}. \\
\{\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}', H_1, \mathfrak{Y}'', \quad \mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}', H_2, \mathfrak{Y}''\}, \\
\quad \text{falls nicht zutrifft: a)} \\
\quad \text{und zutrifft: b) } \Gamma \text{ ist von der Form } \mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}', H_1 \wedge H_2, \mathfrak{Y}''. \\
\{\mathfrak{X}', H_1, \mathfrak{X}'' \vdash \mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{X}', H_2, \mathfrak{X}'' \vdash \mathfrak{Y}\}, \\
\quad \text{falls nicht zutreffen: a), b)} \\
\quad \text{und zutrifft: c) } \Gamma \text{ ist von der Form } \mathfrak{X}', H_1 \vee H_2, \mathfrak{X}'' \vdash \mathfrak{Y}. \\
\{\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}', H_1, H_2, \mathfrak{Y}''\}, \\
\quad \text{falls nicht zutreffen: a), b), c)} \\
\quad \text{und zutrifft: d) } \Gamma \text{ ist von der Form } \mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}', H_1 \vee H_2, \mathfrak{Y}''. \\
\{\mathfrak{X}', \mathfrak{X}'' \vdash H_1, \mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{X}', H_2, \mathfrak{X}'' \vdash \mathfrak{Y}\}, \\
\quad \text{falls nicht zutreffen: a)—d)} \\
\quad \text{und zutrifft: e) } \Gamma \text{ ist von der Form } \mathfrak{X}', H_1 \rightarrow H_2, \mathfrak{X}'' \vdash \mathfrak{Y}. \\
\{\mathfrak{X}, H_1 \vdash \mathfrak{Y}', H_2, \mathfrak{Y}''\}, \\
\quad \text{falls nicht zutreffen: a)—e)} \\
\quad \text{und zutrifft: f) } \Gamma \text{ ist von der Form } \mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}', H_1 \rightarrow H_2, \mathfrak{Y}''. \\
\{\mathfrak{X}', \mathfrak{X}'' \vdash H_1, \mathfrak{Y}\}, \\
\quad \text{falls nicht zutreffen: a)—f)} \\
\quad \text{und zutrifft: g) } \Gamma \text{ ist von der Form } \mathfrak{X}', \sim H_1, \mathfrak{X}'' \vdash \mathfrak{Y}. \\
\{\mathfrak{X}, H_1 \vdash \mathfrak{Y}', \mathfrak{Y}''\}, \\
\quad \text{falls nicht zutreffen: a)—g)} \\
\quad \text{und zutrifft: h) } \Gamma \text{ ist von der Form } \mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}', \sim H_1, \mathfrak{Y}''.
\end{cases}
$$

Als unmittelbare Folgerungen erhalten wir:

1. $Red(\Gamma)$ ist nur für Formeln Γ mit $g(\Gamma) > 0$ definiert.

2. Ist Γ eine aussagenlogische Wahrform mit $g(\Gamma) > 0$ und $\Gamma' \in Red(\Gamma)$, so ist auch Γ' aussagenlogische Wahrform.

Satz 10. *Γ ist aussagenlogische Wahrform $\Rightarrow$ Γ ist ableitbar (in $\varkappa$).*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß für alle $n \geqq 0$ gilt:

Γ ist aussagenlogische Wahrform und $g(\Gamma) = n \Rightarrow \Gamma$ ist ableitbar (in $\varkappa$).

Der Beweis hierfür erfolgt durch vollständige Induktion nach n:

I. $n = 0$: Wenn Γ aussagenlogische Wahrform mit $g(\Gamma) = 0$ ist, dann ist Γ von der Form: $v_1, \ldots, v_q, \ BH_1, \ldots, BH_r \vdash v_1', \ldots, v_s', \ BH_1', \ldots, BH_t'$. Eine Formel von dieser Form ist dann und nur dann aussagenlogische Wahrform, wenn mindestens ein Glied des Antecedens mit einem Glied des Succedens übereinstimmt (Definitionen 10 und 12). Folglich ist Γ ableitbar (Satz 1, (2) *Vv*, (2) *Vh*).

II. $n > 0$: Gegeben sei eine aussagenlogische Wahrform Γ mit $g(\Gamma) = n$. Dann ist das Element Γ_1 bzw. sind die Elemente Γ_1 und Γ_2 von $Red(\Gamma)$ nach Folgerung 2. (eine) aussagenlogische Wahrform(en) mit $g(\Gamma_1) < n$ (und $g(\Gamma_2) < n$). Somit ist (sind) nach Induktionsvoraussetzung Γ_1 (und Γ_2) ableitbar und damit auch Γ, denn Γ_1 entspricht der Oberformel bzw. Γ_1 und Γ_2 entsprechen den Oberformeln und Γ der Unterformel eines Schlusses gemäß einer der Schlußregeln (2) $\wedge v$, $\wedge h$, ..., $\sim v$, $\sim h$.

Satz 11 (Semantische Vollständigkeit). *Γ ist Quasiwahrform $\Rightarrow$ Γ ableitbar (in $\varkappa$).*

Beweis. Gemäß Definition 15 genügt es zu zeigen, daß für alle $n \geqq 0$ gilt:

$$\Gamma \text{ ist } n\text{-stufige Quasiwahrform} \Rightarrow \Gamma \text{ ist ableitbar (in } \varkappa).$$

Der Beweis hierfür erfolgt durch vollständige Induktion nach n:

I. $n = 0$ (Satz 7b), Satz 10).

II. $n > 0$: Gegeben sei eine n-stufige Quasiwahrform $\mathfrak{X} \nvdash \mathfrak{Y}$.

1. Fall: $\mathfrak{X} \nvdash \mathfrak{Y}$ ist aussagenlogische Wahrform. Dann ist $\mathfrak{X} \nvdash \mathfrak{Y}$ ableitbar gemäß Satz 10.

2. Fall: $\mathfrak{X} \nvdash \mathfrak{Y}$ ist keine aussagenlogische Wahrform. $f_1, f_2, \ldots, f_p$ $(p \geqq 1)$ sei die Gesamtheit derjenigen Belegungen von $\mathfrak{X} \nvdash \mathfrak{Y}$, die $\mathfrak{X} \nvdash \mathfrak{Y}$ den Belegungswert F zuerteilen.

Hilfssatz. *Zu jeder Belegung f_ν $(1 \leqq \nu \leqq p)$ gibt es einen Ausdruck H_ν mit*

$$Wert(H_\nu, f_\nu) = F \text{ und } \nvdash H_\nu \text{ ist ableitbar.}$$

Beweis. Da $\mathfrak{X} \nvdash \mathfrak{Y}$ nach Implikationsvoraussetzung eine n-stufige Quasiwahrform ist, erfüllt f_ν $(1 \leqq \nu \leqq p)$ gemäß Definition 14 mindestens eine der folgenden drei Bedingungen:

I. Es gibt ein $BH \in \mathfrak{K}_m(\mathfrak{X} \nvdash \mathfrak{Y})$ mit $Wert(BH, f_\nu) = W$ und $Wert(H, f_\nu) = F$.

II. Es gibt ein $BH \in \mathfrak{K}_m(\mathfrak{X} \nvdash \mathfrak{Y})$ und ein m mit $0 \leqq m < n$, so daß $Wert(BH, f_\nu) = F$, $\mathfrak{K}_m^{(f_\nu)W}(\mathfrak{X} \nvdash \mathfrak{Y}) = \emptyset$ und $\nvdash H$ ist m-stufige Quasiwahrform.

III. Es gibt ein $BH \in \mathfrak{K}_m(\mathfrak{X} \nvdash \mathfrak{Y})$ und ein m mit $0 \leqq m < n$, so daß $Wert(BH, f_\nu) = F$, $\mathfrak{K}_m^{(f_\nu)W}(\mathfrak{X} \nvdash \mathfrak{Y}) = \{BH_1, \ldots, BH_k\}$ $(k \geqq 1)$ und $BH_1, \ldots, BH_k \nvdash H$ ist m-stufige Quasiwahrform.

Fall I: f_ν erfüllt Bedingung I. Dann gibt es einen Ausdruck BH mit den unter I. angegebenen Eigenschaften. Da $Wert(BH \to H, f_\nu) = F$ und $\nvdash BH \to H$ ableitbar ist (Satz 1, (2) Bv, (2) $\to h$), läßt sich H_ν folgendermaßen definieren:

$$H_\nu =_{\mathrm{Df}} BH \to H.$$

Fall II: f_ν erfüllt Bedingung II. Dann gibt es einen Ausdruck BH mit den unter II. angegebenen Eigenschaften. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\nvdash H$ ableitbar und folglich gemäß (2) Bh auch $\nvdash BH$. H_ν läßt sich somit folgendermaßen definieren:

$$H_\nu =_{\mathrm{Df}} BH.$$

Fall III: f_ν erfüllt Bedingung III. Dann gibt es Ausdrücke BH und $BH_1, \ldots, BH_k$ mit den unter III. angegebenen Eigenschaften. Nach Induktionsvoraussetzung ist $BH_1, \ldots, BH_k \nvdash H$ ableitbar und folglich gemäß (2) Bh auch $BH_1, \ldots, BH_k \nvdash BH$,

woraus mit (2) $\wedge v$ und (2) $\rightarrow h \vdash BH_1 \wedge BH_2 \cdots \wedge BH_k \rightarrow BH$ erhältlich ist. Da außerdem gilt: $Wert(BH_1 \wedge \cdots \wedge BH_k \rightarrow BH, f_\nu) = F$, so läßt sich H_ν folgendermaßen definieren:

$$H_\nu =_{\mathrm{Df}} BH_1 \wedge BH_2 \wedge \cdots \wedge BH_k \rightarrow BH.$$

Ordnet man jeder Belegung f_ν $(1 \leqq \nu \leqq p)$ von $\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}$ auf Grund des soeben bewiesenen Hilfssatzes einen derartigen Ausdruck H_ν zu, so läßt sich die folgende aussagenlogische Wahrform bilden: $H_1, H_2, \ldots, H_p, \mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}$. Gäbe es nämlich eine Belegung f von $H_1, \ldots, H_p, \mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}$ und damit zugleich von $\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}$ mit $Wert(H_1, \ldots, H_p, \mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}, f) = F$, so würde $Wert(\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}, f) = F$ gelten, und die Belegung f müßte mit einer Belegung f_ν identisch sein. Für jede Belegung f_ν gilt aber $Wert(H_1, \ldots, H_p, \mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}, f_\nu) = W$. Nach Satz 10 ist somit $H_1, H_2, \ldots, H_p, \mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}$ ableitbar, und da andererseits die Formeln $\vdash H_1, \vdash H_2, \ldots, \vdash H_p$ ableitbar sind, so erhält man durch p-fache Anwendung von Satz 6 die Ableitbarkeit von $\mathfrak{X} \vdash \mathfrak{Y}$.

§ 5. Entscheidbarkeit von $\varkappa$

Das im folgenden dargestellte Entscheidungsverfahren für den Kalkül $\varkappa$ lehnt sich eng an die gegebene Definition der Quasiwahrform an und beruht im Grunde auf der Angabe eines Verfahrens zur Berechnung einer oberen Schranke k_Γ zu jeder Formel Γ, so daß gilt:

Γ ist Quasiwahrform $\Longleftrightarrow$ Es gibt ein n mit:

$$0 \leqq n \leqq k_\Gamma, \textit{ und } \Gamma \textit{ ist } n\textit{-stufige Quasiwahrform.}$$

Für gegebenes n ist entscheidbar, ob eine Formel n-stufige Quasiwahrform ist oder nicht.

Definition 23. Gegeben sei eine Belegung f einer Formel Γ. f ist *B-wahr* genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen (1) oder (2) gilt:

(1) $Wert(\Gamma, f) = W$.

(2) $Wert(\Gamma, f) = F$, und es gibt $BH \in \mathfrak{N}_m(\Gamma)$ mit $Wert(BH, f) = W$ und $Wert(H, f) = F$.

f ist *R-falsch* genau dann, wenn f nicht B-wahr ist und es ein $BH \in \mathfrak{N}_m(\Gamma)$ gibt mit $Wert(BH, f) = F$.

Definition 24. Gegeben sei eine Formel Γ. Γ ist *B-Wahrform* genau dann, wenn für alle Belegungen f von Γ gilt: f ist B-wahr. Γ ist *R-Form* genau dann, wenn jede Belegung von Γ B-wahr oder R-falsch ist, und es eine R-falsche Belegung von Γ gibt.

Definition 25. Gegeben sei eine R-Form Γ. $f_1, f_2, \ldots, f_p$ $(p \geqq 1)$ sei die Gesamtheit der R-falschen Belegungen von Γ. $BH_1^{(\nu)}, BH_2^{(\nu)}, \ldots, BH_{r_\nu}^{(\nu)}$ $(1 \leqq \nu \leqq p; r_\nu \geqq 1)$ sei die Gesamtheit derjenigen modalen Konstituenten von Γ, die bei der Belegung f_ν den Wert F zuerteilt bekommen. $\mathfrak{X}_{f_\nu}$ sei die Folge der Elemente von $\mathfrak{N}_m^{(f_\nu)W}$. Wir setzen: $M_{f_\nu}^{\Gamma} =_{\mathrm{Df}} \{\mathfrak{X}_{f_\nu} \vdash H_1^{(\nu)}, \ldots, \mathfrak{X}_{f_\nu} \vdash H_{r_\nu}^{(\nu)}\}$. $\mathfrak{M}^{\Gamma} =_{\mathrm{Df}} \{M_{f_\nu}^{\Gamma} \mid 1 \leqq \nu \leqq p\}$.

Definition 26 (Mengenfigur einer endlichen Menge von Formeln). Gegeben sei eine endliche Menge $N = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r\}$ $(r \geqq 1)$ von Formeln. Dann soll unter der *Mengenfigur* G von N die Figur:

$$\begin{vmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_r \end{vmatrix}$$

verstanden werden. Mengenfiguren derselben Menge sind als gleich anzusehen.

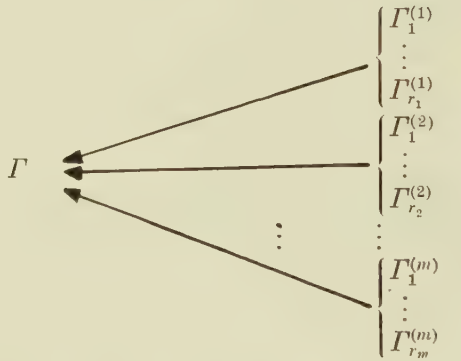
Definition 27 (Konstruktionsfigur einer Formel). Gegeben sei eine Formel Γ.

1. Fall: Γ ist nicht R-Form. Dann werde unter der *Konstruktionsfigur* von Γ die Figur

$$\Gamma$$

verstanden.

2. Fall: Γ ist R-Form, $\mathfrak{M}^{\Gamma} = \{N_1, N_2, \ldots, N_m\}$ $(m \geqq 1)$, $N_\nu = \{\Gamma_1^{(\nu)}, \Gamma_2^{(\nu)}, \ldots, \Gamma_{r_\nu}^{(\nu)}\}$ $(1 \leqq \nu \leqq m;\ r_\nu \geqq 1)$. Dann werde unter der *Konstruktionsfigur* von Γ die folgende Figur verstanden:



Definition 28. Gegeben sei eine Mengenfigur G. G ist *B-Figur* genau dann, wenn in G eine Formel auftritt, die B-Wahrform ist.

G ist *R-Figur* genau dann, wenn G nicht B-Figur ist und in G eine Formel auftritt, die R-Form ist.

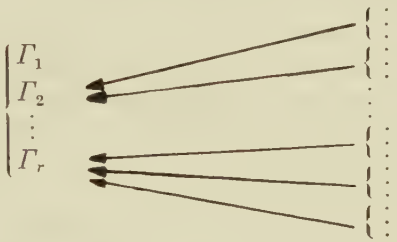
Definition 29 (Konstruktionsfigur einer Mengenfigur). Gegeben sei eine Mengenfigur G,

$$G = \begin{vmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_r \end{vmatrix} \qquad (r \geqq 1).$$

1. Fall: G ist nicht R-Figur. Dann werde unter der *Konstruktionsfigur* von G die folgende Figur verstanden:

$$\begin{matrix}\Gamma_1\\ \Gamma_2\\ \vdots\\ \Gamma_r\end{matrix}$$

2. Fall: G ist R-Figur. Dann werde unter der *Konstruktionsfigur* von G diejenige Figur verstanden, die man aus G durch Ersetzung einer jeden Formel Γ_ν $(1 \leqq \nu \leqq r)$ durch ihre Konstruktionsfigur erhält. Die Pfeillängen sind so zu bemessen, daß alle neu auftretenden Mengenfiguren in einer Spalte untereinander zu stehen kommen. Angedeutet:



Definition 30 (Entscheidungsfigur einer Formel). Gegeben sei eine Formel Γ. Die Figur, die man auf Grund der nachstehenden Konstruktionsvorschrift in endlich vielen Schritten erhält, heiße die *Entscheidungsfigur* von Γ.

1. Schritt: Die Mengenfigur $\{\Gamma$ wird durch ihre Konstruktionsfigur ersetzt. Führt diese Vorschrift zur Bildung einer neuen Spalte — der Spalte 2 der Konstruktion — von Mengenfiguren, so verfährt man gemäß „2. Schritt", andernfalls gilt die Konstruktion als beendet.

2. Schritt: Jede in Spalte 2 stehende Mengenfigur G wird durch ihre Konstruktionsfigur ersetzt, sofern G nicht der „Startmengenfigur" $\{\Gamma$ gleich ist. Die Pfeillängen sind so zu bemessen, daß alle evtl. neu auftretenden Mengenfiguren in einer Spalte — der Spalte 3 — untereinander zu stehen kommen. Führt diese Vorschrift zur Bildung einer neuen Spalte — der Spalte 3 der Konstruktion — von Mengenfiguren, so verfährt man gemäß „3. Schritt", andernfalls gilt die Konstruktion als beendet.

$\vdots$

ν. Schritt: Jede in Spalte ν stehende Mengenfigur G wird durch ihre Konstruktionsfigur ersetzt, sofern nicht bereits eine mit G gleiche Mengenfigur auf dem von der Mengenfigur G bis zur Startmengenfigur durch die Pfeile gegebenen Weg auftritt. Die Pfeillängen sind so zu bemessen, daß alle evtl. neu auftretenden Mengenfiguren in einer Spalte — der Spalte $\nu + 1$ — untereinander zu stehen kommen. Führt diese Vorschrift zur Bildung einer neuen Spalte — der Spalte $\nu + 1$ der Konstruktion — von Mengenfiguren, so verfährt man gemäß „$(\nu + 1)$. Schritt", andernfalls gilt die Konstruktion als beendet.

Die Konstruktion bricht nach endlich vielen Schritten ab. Denn die in den Mengenfiguren der Konstruktion auftretenden Formeln sind sämtlich aus modalen Konstituenten der Formel Γ gebildet. Besitzt Γ k modale Konstituenten, so lassen sich $s\left(s=\sum_{\nu=0}^{k-1}\binom{k}{\nu}(k-\nu)\right)$ derartige Formeln und mithin 2^s-1 paarweise ungleiche Mengenfiguren aus ihnen bilden. Somit ist die Konstruktion spätestens nach Bildung der (2^s+1)-ten Spalte beendet.

Definition 31 (Quasiwahre Formel einer Entscheidungsfigur). Gegeben sei die Entscheidungsfigur $\mathfrak{E}$ mit t Spalten ($t \geqq 1$) einer Formel Γ. Eine Formel Γ', die in einer Mengenfigur der Spalte μ ($1 \leqq \mu \leqq t$) von $\mathfrak{E}$ auftritt, ist *quasiwahr* genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen (1) oder (2) gilt:

(1) Γ' ist B-Wahrform.

(2) Γ' ist R-Form mit a) und b):

a) Es gibt eine Mengenfigur G'' in der Spalte $\mu+1$, von der ein Pfeil zu Γ' führt.

b) In allen Mengenfiguren G' der Spalte $\mu+1$, von denen ein Pfeil zu Γ' führt, tritt eine quasiwahre Formel auf.

Definition 32 (Quasiwahre Mengenfigur einer Entscheidungsfigur). Gegeben sei eine Entscheidungsfigur $\mathfrak{E}$.

Eine Mengenfigur, die in einer Spalte von $\mathfrak{E}$ auftritt, ist *quasiwahr* genau dann, wenn in G eine quasiwahre Formel von $\mathfrak{E}$ auftritt.

Satz 12. *Γ ist B-Wahrform und $n = grad(\Gamma) \Rightarrow \Gamma$ ist n-stufige Quasiwahrform.*

Beweis. Definitionen 24, 23 und 14.

Satz 13. *Jede quasiwahre Formel einer Entscheidungsfigur ist ableitbar (in $\varkappa$).*

Beweis. Gegeben sei die Entscheidungsfigur $\mathfrak{E}$ mit t Spalten ($t \geqq 1$) einer Formel Γ. Jeder Spalte μ ($1 \leqq \mu \leqq t$) von $\mathfrak{E}$ läßt sich eine ganze Zahl $n_\mu \geqq 0$ folgendermaßen zuordnen: Es sei $\Gamma' \in M_\mu$ genau dann, wenn Γ' als quasiwahre Formel in einer Mengenfigur der Spalte μ von $\mathfrak{E}$ auftritt. Wir setzen:

$$m_\mu =_{\mathrm{Df}} \begin{cases} \max\limits_{\Gamma' \in M_\mu} \{grad(\Gamma')\}, & \text{falls } M_\mu \neq \emptyset, \\ 0, & \text{falls } M_\mu = \emptyset, \end{cases}$$

$n_t =_{\mathrm{Df}} m_t$, $\quad n_{t-\nu} =_{\mathrm{Df}} \max\{m_{t-\nu}, n_{t-\nu+1}+1\}$ $\quad (1 \leqq \nu \leqq t-1)$.

Nach Satz 11, Definition 15 genügt es zu zeigen: Für alle Spalten μ ($1 \leqq \mu \leqq t$) von $\mathfrak{E}$ gilt:

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma' \text{ tritt als quasiwahre Formel in} \\ \text{einer Mengenfigur der Spalte } \mu \text{ auf}\end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma' \text{ ist } n_\mu\text{-stufige Quasiwahrform.}$$

Der Beweis hierfür erfolgt durch Induktion:

I. $\mu = t$: Γ' trete als quasiwahre Formel in einer Mengenfigur der Spalte t auf. Nach Definition 31 ist Γ' dann B-Wahrform und somit nach Satz 12 für $n = grad(\Gamma')$ n-stufige Quasiwahrform und damit zugleich n_t-stufige Quasiwahrform, da $n \leqq n_t$ (Satz 7a)).

II. $\mu < t$:

Induktionsvoraussetzung: Tritt Γ' als quasiwahre Formel in einer Mengenfigur der Spalte $\mu + 1$ auf, so ist Γ' $n_{\mu+1}$-stufige Quasiwahrform.

Induktionsbehauptung: Tritt Γ' als quasiwahre Formel in einer Mengenfigur der Spalte μ auf, so ist Γ' n_μ-stufige Quasiwahrform.

Γ' trete als quasiwahre Formel in einer Mengenfigur der Spalte μ auf.

1. Fall: Γ' ist B-Wahrform. Beweis analog zu demjenigen von I.

2. Fall: Γ' ist nicht B-Wahrform. Dann ist gemäß Definition 31 Γ' R-Form mit a) und b):

a) Es gibt eine Mengenfigur G'' in der Spalte $\mu + 1$, von der ein Pfeil zu Γ' führt.

b) In allen Mengenfiguren G' der Spalte $\mu + 1$, von denen ein Pfeil zu Γ' führt, tritt eine quasiwahre Formel auf.

$G_1, G_2, \ldots, G_p$ $(p \geqq 1)$ sei die Gesamtheit derjenigen Mengenfiguren der Spalte $\mu + 1$, von denen ein Pfeil zu Γ' führt. Aus jeder Mengenfigur G_ν $(1 \leqq \nu \leqq p)$ läßt sich nach b) eine quasiwahre Formel Γ_ν auswählen. Nach Induktionsvoraussetzung ist jede solche Formel $n_{\mu+1}$-stufige Quasiwahrform. Da überdies $grad(\Gamma') \leqq n_\mu$ und $n_{\mu+1} < n_\mu$ ist, ist damit für jede R-falsche Belegung f von Γ' Bedingung II. oder Bedingung III. der Definition 14 erfüllt (Def. von n_μ, Definitionen 30 und 23). Mit Definition 24 ergibt sich somit, daß Γ' n_μ-stufige Quasiwahrform ist (Def. 14).

Satz 14. *Γ ist quasiwahre Formel der Startmengenfigur ihrer Entscheidungsfigur genau dann, wenn Γ ableitbar (in $\varkappa$) ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Satz 13.

„$\Leftarrow$“: Nach Satz 9, Definition 15 genügt es zu zeigen:
Für alle $n \geqq 0$ gilt:

Γ ist n-stufige Quasiwahrform $\Rightarrow$ Γ ist quasiwahre Formel der Startmengenfigur ihrer Entscheidungsfigur.

Der Beweis hierfür erfolgt durch vollständige Induktion nach n:

I. $n = 0$: Eine 0-stufige Quasiwahrform Γ ist nach Satz 7 b) aussagenlogische Wahrform und mithin nach den Definitionen 24 und 23 B-Wahrform. Die Entscheidungsfigur von Γ ist dann die Figur

$$\{\, \Gamma$$

mit Γ als quasiwahrer Formel (Definitionen 30 und 31).

II. $n > 0$: Gegeben sei die Entscheidungsfigur $\mathfrak{E}$ mit t Spalten $(t \geqq 1)$ einer n-stufigen Quasiwahrform Γ. Nach den Definitionen 14 und 23 ist jede Belegung f von Γ B-wahr oder R-falsch. Folglich ist Γ B-Wahrform oder R-Form (Def. 24).

1. Fall: Γ ist B-Wahrform. Dann ist Γ quasiwahre Formel der Startmengenfigur ihrer Entscheidungsfigur (Definitionen 30 und 31).

2. Fall: Γ ist R-Form. $f_1, f_2, \ldots, f_p$ $(p \geqq 1)$ sei die Gesamtheit derjenigen Belegungen von Γ, die R-falsch sind. Zu jeder Belegung f_ν $(1 \leqq \nu \leqq p)$ gibt es gemäß Definition 14 eine Formel Γ_ν, die für ein $n_\nu < n$ n_ν-stufige Quasiwahrform ist. Die Entscheidungsfigur $\mathfrak{E}$ der R-Form Γ besitzt mindestens zwei Spalten, und in jeder Mengenfigur G_μ $(1 \leqq \mu \leqq m\colon\ m \leqq p)$ der zweiten Spalte von $\mathfrak{E}$ tritt eine Formel Γ_{ν_μ} auf (Def. 30). Nach Induktionsvoraussetzung ist jede Formel Γ_{ν_μ} quasiwahre Formel der Startmengenfigur ihrer Entscheidungsfigur $\mathfrak{E}_{\nu_\mu}$. Dann läßt sich in jeder Entscheidungsfigur $\mathfrak{E}_{\nu_\mu}$ eine Teilfigur $\mathfrak{E}'_{\nu_\mu}$ mit den folgenden Eigenschaften auffinden:

a) Die Startmengenfigur $\{\Gamma_{\nu_\mu}$ von $\mathfrak{E}_{\nu_\mu}$ tritt in $\mathfrak{E}'_{\nu_\mu}$ auf.

b) Die Gesamtheit der in $\mathfrak{E}'_{\nu_\mu}$ auftretenden Mengenfiguren reicht aus, um jede in $\mathfrak{E}'_{\nu_\mu}$ auftretende Mengenfigur als quasiwahre Mengenfigur von $\mathfrak{E}_{\nu_\mu}$ gemäß den Definitionen 31 und 32 auszuweisen.

Fall 2.1: In einer der Teilfiguren $\mathfrak{E}'_{\nu_\mu}$ $(1 \leqq \mu \leqq m)$ tritt die Mengenfigur $\{\Gamma$ auf. Dann ist $\{\Gamma$ quasiwahre Mengenfigur von $\mathfrak{E}_{\nu_\mu}$ und folglich quasiwahre Startmengenfigur der Entscheidungsfigur $\mathfrak{E}$ von Γ (b), Definitionen 30, 31 und 32).

Fall 2.2: In keiner der Teilfiguren $\mathfrak{E}'_{\nu_\mu}$ $(1 \leqq \mu \leqq m)$ tritt die Mengenfigur $\{\Gamma$ auf. Für alle μ $(1 \leqq \mu \leqq m)$ gilt dann: In $\mathfrak{E}'_{\nu_\mu}$ tritt die Mengenfigur G_μ auf, oder $\mathfrak{E}'_{\nu_\mu}$ ist Teilfigur von $\mathfrak{E}$. Hieraus folgt, daß jede Mengenfigur G_μ quasiwahre Mengenfigur der Entscheidungsfigur $\mathfrak{E}$ von Γ ist, und somit ist Γ quasiwahre Formel der Startmengenfigur ihrer Entscheidungsfigur (Fallannahme, a), b), Definitionen 30, 31 und 32).

Mit Satz 14 ist gezeigt, daß das angegebene Entscheidungsverfahren dem Kalkül $\varkappa$ adäquat ist. Auf Grund der deduktiven Äquivalenz von $\varkappa$ und dem Lewisschen Kalkül S 4 ist das für $\varkappa$ angegebene Entscheidungsverfahren zugleich ein solches für S 4 und läßt sich leicht direkt auf Ausdrücke von S 4 anwenden, wenn man die für $\varkappa$ verwendeten Begriffsbildungen auf den Kalkül S 4 überträgt.

Literatur

[1] Anderson, A. R., Improved decision procedures for Lewis's calculus S 4 and von Wright's calculus M. Journal Symb. Log. **19** (1954), 201—214.

[2] Anderson, A. R., Correction to a paper on modal logic. Journal Symb. Log. **20** (1955), 150.

[3] Curry, H. B., Foundations of Mathematical Logic. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York 1963.

[4] Gödel, K., Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 4 (1933), 39—40.

[5] Schmidt, H. A., Mathematische Gesetze der Logik I. Springer-Verlag, Berlin 1960.

[6] Schröter, K., Theorie des logischen Schließens I. Diese Zeitschr. **1** (1955), 37—86.

[7] Schröter, K., Theorie des logischen Schließens II. Diese Zeitschr. **4** (1958), 10—65.

[8] von Wright, G. H., An Essay in Modal Logic. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1951.

(Eingegangen am 5. Mai 1968)

—D 188—

LEBENSLAUF

Am 29. Juli 1936 wurde ich in Wetzlar als Sohn des Hauptlehrers JAKOB KRAUSKOPF und seiner Ehefrau, der Lehrerin ELISABETH KRAUSKOPF geb. NEUMANN, geboren. Von Herbst 1942 bis Herbst 1946 besuchte ich die Volksschule in Zwesten. 1946 wurde ich in das Städtische Realgymnasium für Jungen zu Bad Wildungen aufgenommen und verließ es am 6. März 1956 mit dem Reifezeugnis. Vom 16. 4. 1956 bis 24. 7. 1964 war ich ordentlicher Studierender der Philipps-Universität, Marburg. Ich belegte Vorlesungen, Seminare oder Praktika für die Fächer: Mathematische Logik und Grundlagenforschung, Mathematik, Chemie, Physikalische Chemie, Physik, Philosophie, Pädagogik, Psychologie, Politologie, Musikwissenschaft und schloß das Hochschulstudium mit der Wissenschaftlichen Prüfung in den Fächern: Mathematik, Chemie und Pädagogik ab. Mit der Ausführung der Dissertation begann ich im Oktober 1964 am I. Mathematischen Institut der Freien Universität und am Institut für Mathematische Logik der Humboldt-Universität Berlin. Die „Studienstiftung des deutschen Volkes" gewährte mir ein „Doktoranden-Stipendium". 1967 heiratete ich die Wissenschaftliche Mitarbeiterin CHRISTINA ABRAHAM.

Meine akademischen Lehrer waren die Damen und Herren Professoren und Dozenten: W. ABENDROTH, E. BLOCHMANN, W. BROSER, K. DIMROTH, M. DORER, H. DÜKER, H. ENGEL, M. EICHLER, L. FROESE, L. GAEBE, A. GRABOWSKY, K. P. GROTEMEYER, K. HÄRTIG, H. KLINGEN, H. KUHN, C. MAHR, G. MANECKE, H. PACHALE, A. PEYERIMHOFF, E. PFEIL, K. REICH, P. ROEDER, K. SEIDELMANN, H. A. SCHMIDT, K. SCHRÖTER, K. SCHÜTTE, H. TÖPFER, W. WALCHER, W. WEISCHEDEL, H. WINKLER, E. WIRSING.

Ihnen allen bin ich zu großem Dank verpflichtet.